



**Univerzitet Crne Gore  
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.  
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204  
fax: +382 (0)20 245 204  
[www.pmf.ac.me](http://www.pmf.ac.me)

Broj: 1023101-1955/3

Datum: 26. 09. 2023

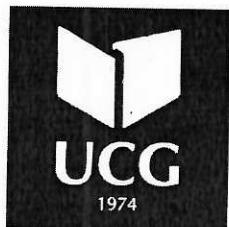
**UNIVERZITET CRNE GORE**

**-Senatu-**

**-Centru za doktorske studije-**

U prilogu akta dostavljamo Predloge Odluka sa CIV sjednice Vijeća održane 26.09.2023.godine.





**Univerzitet Crne Gore  
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.  
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204  
fax: +382 (0)20 245 204  
[www.pmf.ac.me](http://www.pmf.ac.me)

Broj: 102500-1937  
26.09.2023.

Datum: \_\_\_\_\_

Na osnovu člana 64 stav 2 tačka 8 Statuta, a u vezi sa članom 43 i 44 Pravila doktorskih studija Univerziteta Crne Gore, na CIV sjednici održanoj 26.09.2023.godine, Vijeće je donijelo

**O D L U K U**

I

Prihvata se Izvještaj komisije za ocjenu doktorske disertacije pod nazivom "**Granična svojstva kvazokonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**" kandidata mr Antona Đokaja.

II

**Predlažemo** Senatu Univerziteta Crne Gore **da prihvati** disertaciju "Granična svojstva kvazokonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru" kandidata mr Antona Đokaja i imenuje komisiju za odbranu doktorske disertacije u sastavu:

1. Dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
2. Dr Miodrag Mateljević, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
3. Dr Đordje Vučadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
4. Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
5. Dr David Kaljaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore.

III

Predlog se dostavlja Centru za doktorske studije i Senatu Univerziteta Crne Gore na dalju proceduru.



## OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE

<b>OPŠTI PODACI O DOKTORANDU</b>		
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj	
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet	
Studijski program	Matematika	
Broj indeksa	2/19	
<b>MENTOR/MENTORI</b>		
Prvi mentor	Prof. dr David Kalaj	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora
Drugi mentor	-	-
<b>KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE</b>		
Prof. dr Darko Mitrović	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr David Kalaj	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Miodrag Mateljević	Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija	
Prof. dr Marijan Marković	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Đorđije Vujadinović	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
<b>Datum značajni za ocjenu doktorske disertacije</b>		
Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dostavljen Biblioteci UCG	20.7.2023. g.	
Javnost informisana (dnevne novine) da su Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dati na uvid	20.7.2023. g.	
Sjednica Senata na kojoj je izvršeno imenovanje Komisije za ocjenu doktorske disertacije	23.06.2023.	
<b>Uvid javnosti</b>		
U predviđenom roku za uvid javnosti bilo je primjedbi?		
<b>OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE</b>		
1. <b>Pregled disertacije</b> (bibliografski podaci o disertaciji i sažetak disertacije)		
<p>Kandidat MSc Anton Gjokaj je 2019. godine upisao doktorske studije matematike. Položio je sve ispite koji su predviđeni Planom doktorskih studija koji su usvojeni na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Nakon uspješne odbrane polaznih istraživanja 2022. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije "Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru".</p>		
<p>U ovoj doktorskoj disertaciji kandidat ispituje Lipschitz i Hölder neprekidnost</p>		

generalizuje poznate rezultate iz ravni.

Disertacija se sastoji od rezimea, abstracta na engleskom jeziku, predgovora, tri glave, 12 slika, spiska specijalnih oznaka i spiska literature.

Prve dvije glave imaju uvodni karakter i sadrže poznate rezultate koje se odnose na teoriju Laplaceove i Poissonove jednačine (prva glava), odnosno kvazikonformnih preslikavanja (druga glava). Rezultati su ilustrovani dodatnim primjerima i djelimično prikazani na originalan način zbog potrebnih modifikacija koje se odnose na rezultate istraživanja.

Prva glava je posvećena rješavanju Dirichletovog problema za jediničnu loptu  $B$  i odgovarajućeg nehomogenog Dirichletovog problema za loptu, odnosno rješavanju Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine u slabom smislu. Prvo su uvedena harmonijska preslikavanja, dokazana je Greenova reprezentacija a zatim razmatran Dirichletov problem za loptu i nehomogeni Dirichletov problem u slabom smislu.

U drugoj glavi je izložen pregled osnovnih pojmova iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Najprije je dat geometrijski pristup kroz formulaciju pojma modula krivih, a zatim i analitički pristup, uz dokaz osnovnih svojstva i uz dodatne primjere. U drugom djelu ove glave, izučavajući modul krivih, odnosno utvrdeći njegova svojstva i posmatrajući familije krivih koje spajaju komponente povezanosti Grötzschovog i Teichmüllerovog prstena, dat je dokaz Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja iz  $B$  u  $B$ , koje centar 0 slikaju u sebe. Ovim dobro poznatim rezultatom se obezbjeduje  $\alpha$ -Hölder neprekidnost preslikavanja, za  $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$ , sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od  $K$ .

Treća glava predstavlja dokaze hipoteza doktorske disertacije, originalne rezultate kandidata koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste. Uopštena je Hardy-Littlewood teorema i za prostor, kroz dvije različite verzije. U slučaju kada je slika prostorna oblast sa  $C^{1,\alpha}$  granicom, Lipschitz neprekidnost je dokazana i u slučaju kvazikonformnih preslikavanja koja su harmonijska, i u slučaju kada se uslov harmoničnosti (da je Laplasijan jednak nula) zamijeni uslovom da je Laplasijan iz  $L^p$  prostora. U slučaju kada kodomen je prostorna oblast sa  $C^1$  granicom, ukazano je na primjere zbog kojih ne važi Lipschitz neprekidnost i dokazana je Hölder neprekidnost sa uniformnim koeficijentom za tu familiju preslikavanja.

## 2. Vrednovanje disertacije

2.1. *Problem (navesti neriješena i kontraverzna mišljenja o istraživačkom problemu i dosadašnjim pokušajima rješavanja problema, rješenja do kojih su došli drugi autori, ocjenu osnove disertacije u skladu sa radovima i istraživanjima kandidata i način njihove veze sa samom disertacijom)*

Centralna tema ove disertacije je ispitivanje modula neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte prostora u oblast sa granicom određene glatkosti.

Imajući u vidu da analitička preslikavanja u ravni su i harmonijska, finski matematičar O. Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja kao generalizaciju analitičkih preslikavanja u ravni. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara.

Bitan trenutak u intenzitetu razvoja ove oblasti predstavlja rad M. Pavlovića iz 2002. godine, gdje je između ostalog dokazano da kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska  $D$  u sebe su bi-Lipschitz neprekidna. Nakon toga, niz matematičara (D. Kalaj, M. Mateljević, K. Astala, D. Partyka, M. Arsenović itd.) se posvetio radu na ovoj temi i dobijeni su interesantni rezultati kroz uopštavanje rezultata na razne oblasti u ravni (na primjer između oblasti sa granicama  $C^{1,\alpha}$  glatkosti, odnosno oblasti sa granicama  $C^1$  glatkosti) ili kroz olakšavanje uslova harmoničnosti funkcije (Laplacijan funkcije pripada nekom integrabilnom prostoru).

Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u  $R^n$ , za  $n \geq 3$ ), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Ovom disertacijom se uopštavaju rezultati iz ravni u prostor  $R^n$ , a u nekim slučajevima i poboljšavaju postojeći oslabljenjem uslova glatkosti na granici slike. Stoga, disertacija predstavlja značajan doprinos u izučavanju graničnih svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Poissonov integral i modul krivih, i koristi interesantne matematičke tehnike i pristupe u dokazivanju teorema.

## 2.2. Ciljevi i hipoteze disertacije

Glavni ciljevi disertacije su:

- 1) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom.
- 2) Ispitivanje Hölder neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^1$  granicom.
- 3) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog preslikavanja  $f$  koje zadovoljava uslov  $\Delta f = g$ , gdje je  $g \in L^p$ , za  $p > n$ , iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom.

## 2.3. Bitne metode koje su primijenjene u disertaciji i njihovu primjerenost. Ako je primijenjena nova ili dopunjena metoda, opišite šta je novo

Značajnu ulogu u dokazivanju rezultata disertacije ima Hardy-Littlewood teorema, koja je u ovoj disertaciji uopštена za harmonijske funkcije iz jedinične lopte  $B$  prostora  $R^n$ .

Teorema daje vezu između koeficijenta  $\mu$ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku  $\eta \in S$  harmonijske funkcije  $u = u(x)$ , tj.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\eta) - u(\xi)\|}{\|\eta - \xi\|^\mu} \quad (1)$$

i vrijednosti

$$\sup_{x \in [0, \eta]} (1 - \|x\|)^{1-\mu} \|\nabla u(x)\|. \quad (2)$$

Konkretno, ovom teoremom se dokazuje direktna zavisnost (ekvivalencija) između ograničenosti jedne i druge vrijednosti. Dokaz je izведен primjenom Poissonovog integrala. Naime, svaka funkcija  $u: \overline{B} \subset R^n \rightarrow R$ , gdje je  $u$  harmonijska u jediničnoj lopti  $B$ , a neprekidna u  $\overline{B} = B \cup S$ , se može predstaviti u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je  $\sigma$  normalizovana površinska mjera na  $S$ .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, dokazana je i odgovarajuća verzija teoreme u slučaju da je  $\mu > 1$ . Ako za fiksirano  $\eta \in S$ , važi nejednakost

$$\|u(\eta) - u(\xi)\| \leq M \|\eta - \xi\|^\mu, \quad \text{za } \xi \in S,$$

onda je  $\|\nabla u(x)\| \leq C$ , za  $x$  iz duži  $[0, \eta]$ , gdje je  $C$  konstanta koja zavisi samo od  $\mu$  i  $M$ .

Dakle, teorema donosi ekvivalenciju između dva uslova, pri čemu jedan se odnosi na sferu, a drugi na unutrašnjost lopte  $B$ . Način na koji se ta veza koristi predstavlja glavni momenat u dokazu rezultata (1) i (3). Naime, kandidat koristi jednu zanimljivu tehniku koja omogućava sukcesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti  $B$ , imajući kao bazni slučaj  $\beta$ -Hölder neprekidnost koje se dobija primjenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov  $C^{1,\alpha}$  granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik  $C^{1,\alpha}$  funkcije. To omogućava da  $n$ -ta koordinata funkcije  $f$  u odnosu na jednu fiksiranu tačku bude  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u  $S$ , što na osnovu pomenute Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti (2). Koristeći kvazikonformnost preslikavanja  $f$  tu nejednakost kandidat prvo prenosi i na ostale koordinate funkcije  $f$ , a koristeći pogodne izometrije i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U tom momentu, Hardy-Littlewood teorema daje  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost preslikavanja u čitavoj lopti. Sukcesivnom primjenom ovog postupka, kandidat dobija da je  $f$   $\mu$ -Hölder neprekidno za sve  $\mu \in (0, 1)$ . Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvaren na analogan način kao za preostale iteracije, osim što se u tom slučaju koristi Hardy-Littlewood teorema za slučaj  $\mu > 1$ .

U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno i objavljanjem naučnih radova.

#### 2.4. Rezultati disertacije i njihovo tumačenje

Originalni rezultati kandidata su:

- 1) kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom je Lipschitz neprekidno.
- 2) kvazikonformna harmonijska preslikavanja, koja pripadaju Bloch prostoru, iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^1$  granicom su uniformno Hölder neprekidna.
- 3) kvazikonformno preslikavanje  $f$  koje zadovoljava uslov  $\Delta f = g$ , gdje je  $g \in L^p$ , za  $p > n$ , iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom je Lipschitz neprekidno.

Rezultati predstavljaju generalizaciju dobijenih rezultata u ravni. Rezultat 3) u prostoru je već dokazan u slučaju da  $\Omega$  ima  $C^2$  granicu, pa zato predstavlja i poboljšanje već poznatih rezultata.

#### 2.5. Zaključci (usaglašenost sa rezultatima i logično izvedeno tumačenje)

Dati zaključci unutar ove doktorske disertacije dati su logičkim slijedom. Sva tvrđenja su dokazana korišćenjem matematičkog aparata, a proizilaze iz jasno potkrijepljenih i obrazloženih činjenica.

### 3. Konačna ocjena disertacije

#### 3.1. Usaglašenost sa obrazloženjem teme

Disertacija je usaglašena sa obrazloženjem teme.

#### 3.2. Mogućnost ponovljivosti

Ponovljivost rezultata dobijenih u disertaciji je moguća, uz poštovanje metodologije i zadatih uslova.

#### 3.3. Buduća istraživanja

Ostaje otvoreno pitanje da li rezultat 2) važi i bez uslova da preslikavanje pripada Bloch prostoru kao i da li rezultati važe i u slučaju kada se umjesto lopte u domenu posmatra oblast sa granicom određene glatkosti.

#### 3.4. Ograničenja disertacije i njihov uticaj na vrijednost disertacije

Nema posebnih ograničenja.

### Originalni naučni doprinos

. U pogledu naučnog doprinosa izdvajamo sljedeće:

- 1) dokaz Hardy-Littlewood teoreme za prostor.
- 2) kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu

oblast sa granicom je Lipschitz neprekidno.

3) kvazikonformna harmonijska Bloch preslikavanja iz jedinične lopte u na prostornu oblast sa granicom su uniformno Hölder neprekidna.

4) kvazikonformno preslikavanja koje zadovoljava uslov , gdje je , iz jedinične lopte u na prostornu oblast sa granicom je Lipschitz neprekidno.

Rezultati koji predstavljaju originalni doprinos disertacije su publikovani kroz dva rada u časopisima sa SCI/SCIE liste i kroz izlaganje na jednom simpozijumu.

#### Mišljenje i prijedlog komisije

Na osnovu prethodnog, Komsija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Antona Gjokaja ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima originalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja.

Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja i odobri njenu javnu odbranu.

#### Izdvojeno mišljenje

(popuniti ukoliko neki član komisije ima izdvojeno mišljenje)

Ime i prezime

#### Napomena

(popuniti po potrebi)

#### KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE

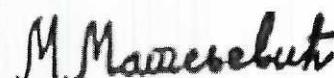
Prof. dr Darko Mitrović, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet Crne Gore, Crna Gora



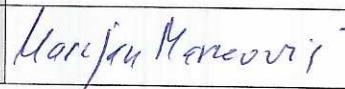
Prof. dr David Kalaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet  
Crne Gore, Crna Gora



Prof. dr Miodrag Mateljević, Matematički fakultet, Univerzitet u  
Beogradu, Srbija



Prof. dr Marijan Marković, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet Crne Gore, Crna Gora



Prof. dr Đordđe Vujadinović, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet Crne Gore, Crna Gora

*Popstave  
Bogdanobacat*

Datum i ovjera (pečat i potpis odgovorne osobe)  
U Podgorici,



*M. Šešelj*  
DEKAN

## VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA I

### SENATU UNIVERZITETA CRNE GORE

#### PREDMET: Ocjena doktorske disertacije Antona Gjokaja

Na sjednici Senata Univerziteta Crne Gore održanoj 23.06.2023. godine imenovana je Komisija u sastavu: dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr Miodrag Mateljević, redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu, dr Đordje Vučadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore i dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore čiji je zadatak da ocijeni i pregleda doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja.

Komisija je pregledala tekst disertacije i Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore podnosi sljedeći

#### IZVJEŠTAJ

##### Pregled disertacije

Kandidat MSc Anton Gjokaj je 2019. godine upisao doktorske studije matematike. Položio je sve ispite koji su predviđeni Planom doktorskih studija koji su usvojeni na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Nakon uspješne odbrane polaznih istraživanja 2022. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*".

U ovoj doktorskoj disertaciji kandidat ispituje Lipschitz i Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte  $B \subset R^n$  u prostornu oblast i generalizuje poznate rezultate iz ravni.

Disertacija se sastoji od rezimea, abstracta na engleskom jeziku, predgovora, tri glave, 12 slika, spiska specijalnih oznaka i spiska literature.

Prve dvije glave imaju uvodni karakter i sadrže poznate rezultate koje se odnose na teoriju Laplaceove i Poissonove jednačine (prva glava), odnosno kvazikonformnih preslikavanja (druga glava). Rezultati su ilustrovani dodatnim primjerima i djelimično prikazani na originalan način zbog potrebnih modifikacija koje se odnose na rezultate istraživanja.

Prva glava je posvećena rješavanju Dirichletovog problema za jediničnu loptu  $B$  i odgovarajućeg nehomogenog Dirichletovog problema za loptu, odnosno rješavanju Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine u slabom smislu. Prvo su uvedena harmonijska preslikavanja, dokazana je Greenova reprezentacija a zatim razmatran Dirichletov problem za loptu i nehomogeni Dirichletov problem u slabom smislu.

U drugoj glavi je izložen pregled osnovnih pojmova iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Najprije je dat geometrijski pristup kroz formulaciju pojma modula krivih, a zatim i analitički pristup, uz dokaz osnovnih svojstva i uz dodatne primjere. U drugom djelu ove glave, izučavajući modul krivih, odnosno utvrdeći njegova svojstva i posmatrajući familije krivih koje spajaju komponente povezanosti Grötzschovog i Teichmüllerovog prstena, dat je dokaz Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja iz  $B$  u  $B$ , koje centar slikaju u sebe. Ovim dobro poznatim rezultatom se obezbjeđuje  $\alpha$ -Hölder neprekidnost preslikavanja, za  $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$ , sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od  $K$ .

Treća glava predstavlja dokaze hipoteza doktorske disertacije, originalne rezultate kandidata koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste. Uopštena je Hardy-Littlewood teorema i za prostor, kroz dvije različite verzije. U slučaju kada je slika prostorna oblast sa  $C^{1,\alpha}$  granicom, Lipschitz neprekidnost je dokazana i u slučaju kvazikonformnih preslikavanja koja su harmonijska, i u slučaju kada se uslov harmoničnosti (da je Laplasijan jednak nula) zamijeni uslovom da je Laplasijan iz  $L^p$  prostora. U slučaju kada kodomen je prostorna oblast sa  $C^1$  granicom, ukazano je na primjere zbog kojih ne važi Lipschitz neprekidnost i dokazana je Hölder neprekidnost sa uniformnim koeficijentom za tu familiju preslikavanja.

## Vrednovanje disertacije

Centralna tema ove disertacije je ispitivanje modula neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte prostora u oblast sa granicom određene glatkosti.

Imajući u vidu da analitička preslikavanja u ravni su i harmonijska, finski matematičar O. Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja kao generalizaciju analitičkih preslikavanja u ravni. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara.

Bitan trenutak u intenzitetu razvoja ove oblasti predstavlja rad M. Pavlovića iz 2002. godine, gdje je između ostalog dokazano da kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska  $D$  u sebe su bi-Lipschitz neprekidna. Nakon toga, niz matematičara (D. Kalaj, M. Mateljević, K. Astala, D. Partyka, M. Arsenović itd.) se posvetio radu na ovoj temi i dobijeni su interesantni rezultati kroz uopštavanje rezultata na razne oblasti u ravni (na primjer između oblasti sa granicama  $C^{1,\alpha}$  glatkosti, odnosno oblasti sa granicama

$C^1$  glatkosti) ili kroz olakšavanje uslova harmoničnosti funkcije (Laplasijan funkcije pripada nekom integrabilnom prostoru).

Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u  $R^n$ , za  $n \geq 3$ ), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Ovom disertacijom se uopštavaju rezultati iz ravni u prostor  $R^n$ , a u nekim slučajevima i poboljšavaju postojeći oslabljenjem uslova glatkosti na granici slike. Stoga, disertacija predstavlja značajan doprinos u izučavanju graničnih svojstava kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Poissonov integral i modul krivih, i koristi interesantne matematičke tehnike i pristupe u dokazivanju teorema.

**Zaključak:** Prilikom izrade disertacije kandidat je koristio različite metode realne analize.

Značajnu ulogu u dokazivanju rezultata disertacije ima Hardy-Littlewood teorema, koja je u ovoj disertaciji uopštена za harmonijske funkcije iz jedinične lopte  $B$  prostora  $R^n$ . Teorema daje vezu između koeficijenta  $\mu$ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku  $\eta \in S$  harmonijske funkcije  $u = u(x)$ , tj.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\eta) - u(\xi)\|}{\|\eta - \xi\|^\mu} \quad (1)$$

i vrijednosti

$$\sup_{x \in [0, \eta]} (1 - \|x\|)^{1-\mu} \|\nabla u(x)\|. \quad (2)$$

Konkretno, ovom teoremom se dokazuje direktna zavisnost (ekvivalencija) između ograničenosti jedne i druge vrijednosti. Dokaz je izведен primjenom Poissonovog integrala. Naime, svaka funkcija  $u: \overline{B} \subset R^n \rightarrow R$ , gdje je  $u$  harmonijska u jediničnoj lopti  $B$ , a neprekidna u  $\overline{B} = B \cup S$ , se može predstaviti u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je  $\sigma$  normalizovana površinska mjera na  $S$ .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, dokazana je i odgovarajuća verzija teoreme u slučaju da je  $\mu > 1$ . Ako za fiksirano  $\eta \in S$ , važi nejednakost

$$\|u(\eta) - u(\xi)\| \leq M \|\eta - \xi\|^\mu, \quad \text{za } \xi \in S,$$

onda je  $\|\nabla u(x)\| \leq C$ , za  $x$  iz duži  $[0, \eta]$ , gdje je  $C$  konstanta koja zavisi samo od  $\mu$  i  $M$ .

Dakle, teorema donosi ekvivalenciju između dva uslova, pri čemu jedan se odnosi na sferu, a drugi na unutrašnjost lopte  $B$ . Način na koji se ta veza koristi predstavlja glavni momenat u dokazu rezultata (1) i (3). Naime, kandidat koristi jednu zanimljivu tehniku koja omogućava suksesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti  $B$ , imajući kao bazni slučaj  $\beta$ -Hölder neprekidnost koje se dobija primjenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov  $C^{1,\alpha}$  granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik  $C^{1,\alpha}$  funkcije. To omogućava da  $n$ -ta koordinata funkcije  $f$  u odnosu na jednu fiksiranu tačku bude  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u  $S$ , što na osnovu pomenute Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti (2). Koristeći kvazikonformnost preslikavanja  $f$  tu nejednakost kandidat prvo prenosi i na ostale koordinate funkcije  $f$ , a koristeći pogodne izometrije i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U tom momentu, Hardy-Littlewood teorema daje  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost preslikavanja u čitavoj lopti. Sukcesivnom primjenom ovog postupka, kandidat dobija da je  $f$   $\mu$ -Hölder neprekidno za sve  $\mu \in (0,1)$ . Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvaren na analogan način kao za preostale iteracije, osim što se u tom slučaju koristi Hardy-Littlewood teorema za slučaj  $\mu > 1$ .

U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno i objavljinjem naučnih radova.

Na osnovu prethodnog, Komsija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Antona Gjokaja ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima originalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja.

Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja i odobri njenu javnu odbranu.



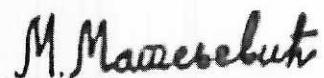
dr Darko Mitrović,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr David Kalaj,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



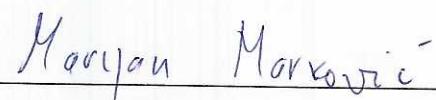
dr Miodrag Mateljević,

redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu



dr Đordje Vučadinović,

vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr Marijan Marković,

vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



Univerzitet Crne Gore  
Centralna univerzitetska biblioteka  
adresa / address\_ Cetinjska br. 2  
81000 Podgorica, Crna Gora  
telefon / phone \_00382 20 414 245  
fax\_ 00382 20 414 259  
mail\_ cub@ucg.ac.me  
web\_ www.ucg.ac.me  
Central University Library  
University of Montenegro

Broj / Ref 01/6-16-3361/6  
Datum / Date 28.08.2023

Crna Gora  
UNIVERZITET CRNE GORE  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Broj \_\_\_\_\_  
Podgorica, 20 god.

**UNIVERZITET CRNE GORE**  
**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**

**Dekan**  
**Prof. dr Miljan Bigović**

Poštovani profesore Bigoviću,

U prilogu akta dostavljamo Vam doktorsku disertaciju mr **Antona Đokaja** pod naslovom: „**Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**“ i Izvještaj o ocjeni doktorske disertacije koji su u skladu sa članom 42 stav 3 Pravila doktorskih studija dostavljeni **Centralnoj univerzitetskoj biblioteci** 20. 07. 2023. godine, na uvid i ocjenu javnosti.

Na navedeni rad nije bilo primjedbi javnosti u predviđenom roku od 15 dana.

Molimo Vas da nam nakon odbrane, a u skladu sa članom 47 Pravila doktorskih studija, dostavite konačnu verziju doktorske disertacije.

S poštovanjem,

Pripremila:

Milica Barac   
Administrativna asistentkinja  
Tel: 020 414 245  
e-mail: [cub@ucg.ac.me](mailto:cub@ucg.ac.me)



**DIREKTOR**

mr Bosiljka Ćirić



Crna Gora  
Ministarstvo zdravlja

#### OBAVJEŠTENJE O JAVNOM KONKURSU

Ministarstvo zdravljva Vlade Crne Gore, obavještava nevladine organizacije da će dana 20. jula 2023. godine objaviti Javni konkurs pod nazivom "ZAJEDNO KA UNAPREDBENJU ZDRAVSTVENE ŽAŠTITE I PODRŠKE ZA OSI I DEUCU SA SMETNJAMA U RAZVOJU" za finansiranje projekata/programa nevladinih organizacija u oblasti Žaštita lica sa invaliditetom u 2023. godini.

Rok za podnošenje prijava na javni konkurs je trideset (30) dana od dana objavljanja, odnosno zaključno sa 19. avgustom 2023. godine.

Sve informacije su dostupne na internet stranici Ministarstva zdravljva Vlade Crne Gore <https://www.gov.me/mzd>

#### UNIVERZITET CRNE GORE PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

##### OBAVJEŠTENJE

Doktorska disertacija mr Antona Đokaja pod naslovom „Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru“ izveštaj o ocjeni doktorske disertacije stavljaju se na uvid javnosti.

Izveštaj o ocjeni doktorske disertacije podnijela je Komisija u sastavu:

1. Dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
2. Dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
3. Dr Miodrag Mateljević, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
4. Dr Đordje Vučadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
5. Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

Pregled doktorske disertacije i Izveštaja se može obaviti u roku od 15 dana od dana objavljanja ovog obavještenja u Centralnoj univerzitetkoj biblioteci Univerziteta Crne Gore.

Posl. br. Ivm 945/16

JAVNI IZVRŠITELJ NOVAK VUKČEVIĆ IZ PODGORICE, u pravnoj stvari izvršnog povjerioca „Foldana financial“ DOO, ul. Cetinjska br. 11, The Capital plaza, Podgorica, koju zastupa adv. Valentina Dujović radulović (raniji izvršni povjerilac, „Erste bank AD“ ul. Arsenije Božićević br. 2A, Podgorica), protiv izvršnog dužnika Časlav Balšić, sa adresom u ul. Jerevanska br. 24, Podgorica, radi naplate novčanog potraživanja, dana 18.07.2023. godine, donio je

##### ZAKLJUČAK O DOSTAVLJANJU PUTEM JAVNOG OBJAVLJIVANJA

Izvršnom dužniku Časlav Balšiću vrši se dostavljanje Rješenja o izvršenju postupajućeg J. Mladenova Pavličića Ivm. br. 945/16 od 05.12.2016. godine, sa predlogom za izvršenje i dokazima i Rješenja o izvršenju Ivm. br. 945/16 od 11.07.2019. godine, kao i rješenja o visini troškova Ivm. br. 945/16 od 27.06.2023. godine. Izvršni dužnik može se obratiti Javnom izvršitelju Vukčević Novaku iz Podgorice, na adresi ul. Slobode br.63, II sprat, u Podgorici, radi podizanja navedenih rješenja, u roku od 3 dana od dana oglašavanja u dnevnom štampanom mediju.

Upozorava se izvršni dužnik da se ovakav način dostave smatra urednim i da će negativne posledice koje mogu nastati ovakvim načinom dostavljanja snositi sama stranka, odnosno izvršni dužnik.

Dostavljanje se smatra izvršenim nakon isteka roka od osam dana od dana isticanja pisma na oglašnoj tabli suda, ukoliko je prethodno izvršeno objavljanje u dnevnom štampanom mediju.

Javni izvršitelj iz Podgorice  
Vukčević Novak

I.br.1741/22

JAVNA IZVRŠITELJKA SNEŽANA PAVLIČIĆ IZ PODGORICE, u pravnoj stvari izvršnog povjerioca „ERSTE BANK“ AD Podgorica, Ul. Arsenije Božićević br. 2A, koga zastupa Advokatska kancelarija Čvorović, Minić & Radunović OD Podgorica, protiv izvršnog/hipotekarnog dužnika Petarović Milomira iz Podgorice, Hotska br.10, i učesnika u postupku Morgan Davida (ranije prezime Vujović) iz Podgorice, Marka Miljanova br.46a, radi naplate novčanog potraživanja, dana 19.07.2023. godine, shodno članu 45 Zakona o izvršenju i obezbjeđenju, donijela je odluku o

##### DOSTAVLJANJU JAVNIM OBJAVLJIVANJEM

Poziva se Morgan David (ranije prezime Vujović) iz Podgorice, Marka Miljanova br.46a, sa poslednjom poznatom adresom kao napredje navedeno, da se u roku od 3 (tri) dana od dana objavljanja ove odluke u ovom štampanom mediju obrati postupajućoj Javnoj izvršiteljki na adresi Ul. 13. jula br.18, Podgorica, radi uručenja zaključka I.br.1741/22 od 19.07.2023. godine. Ukoliko se izvršni dužnik u ostavljenom roku ne obrati postupajućoj Javnoj izvršiteljki, dostavljanje navedenog pisma će se izvršiti isticanjem na oglašnoj tabli nadležnog suda, pri čemu će se dostavljanje smatrati izvršenim nakon isteka roka od 8 (osam) dana od dana isticanja pisma na oglašnoj tabli suda.

Upozorava se izvršni dužnik da se dostavljanje Javnim objavljinjem smatra urednom dostavom i da će negativne posledice koje mogu nastati ovakvim načinom dostavljanja snositi sama stranka, odnosno izvršni dužnik.

# Američki prebjeg je logistički problem za Pjongjang

N. Bogetić

**P**ričilo je izvjesno da će Sjeverna Koreja iskoristiti prelaz američkog vojnika u propagandne svrhe, ali vjerovalno neće uspjeti da dobije politički uticaj, tvrde analitičari i bivši sjevernokorejski diplomata.

Pjongjang bi na kraju mogao da plati visoku cijenu kako bi zadražio američkog redovca Trevisa Kinga u zlatnom kavezu, tvrde oni.

Kingova sudjelina je bila neizvjesna juče, dan nakon što je pobjegao u Sjevernu Koreju tokom puta u strogo kontrolisanog Zajedničkog bezbjednosnog oblasti (JSA) na granici između dvije Koreje.

Američki zvaničnici su kazali da vjeruju da je King na mjeru prešao granicu i da su ga priveli sjevernokoreanci.

Nezavisno od toga da li je zatvorenik ili prebjeg, King će vjerovalno postati pion u borbi koja datira još od Hladnog rata i godina Korejskog rata 1950-53, kazali su analitičari za Rojters.

Analitičari smatraju da bi razgovori o sudbini vojnika mogli biti neki od prvih diplomatskih kontakata između Sjeverne Koreje i Sjedinjenih Država posljednjih godina. Međutim, oni tvrde da incident neće uticati na zamrzнуте pregovore o demobilizaciji ili dovesti do pukotina u izolaciji Sjeverne Koreje.

Pjongjang zapravo nikada nije uspijevao da takve sluča-

Za Sjevernu Koreju američki vojnik koji je prešao granicu predstavlja propagandnu pobjedu, ali neće poslužiti kao instrument za političko cjenkanje

je iskoristiti za geopolitički uticaj, kazao je za Rojters Andrej Lankov direktor Korejske grupe za procjenu rizika u središtem u Seulu.

“Ne sjećam se slučaja kada su uspjeli da tako nešto iskoriste kako bi dobili ozbiljne ustupke, ali na domaćem planu će ubrati poene jer njihova propaganda to predstavlja kao još jednu propalnu američku provokaciju, dok američki imperialisti na koljenima male za oproštaj”, kazao je on.

Dosta će zavistiti od toga da li Sjeverna Koreja na to gleda kao na dobru priliku da komunicira sa SAD, kazala je ona.

“Sjeverna Koreja zna da je malo vjerovalno da će američka vlast promijeniti svoju politiku prema Sjevernoj Koreji ili svoju posvećenost odvraćanju zbog jednog američkog vojnika koji se navod-

no suočavao da disciplinskim postupkom i koji je svojевoljno prešao u Sjevernu Koreju.”

Bivši sjevernokorejski di-

plomata Tae Jong-ho, koji je

sada poslanik u parlamentu Južne Koreje, kazao je da državan američkog vojnika vjerovalno nije isplativo i da

može predstavljati glavobolju

za Pjongjang na duže staze.

Kada neki američki vojnik prebjegne, Sjeverna Koreja treba da kreira bezbjednosni i tim da nadzor, da angažuje prevođača, privatno vozilo, vozača i smještaj, kazao je on.

“Što se dnevno životu tiče oni ne mogu da odu sami u



Redov Trevis T. King (u crnoj majici sa kapom) is tokom obilaska zajedničke zone bezbjednosti na granici dvije Koreje

Foto: Rojters

**S**totinе izraelskih rezervista marširale su juče u Tel Avivu prijetći da će odbiti dobrovoljnu službu ukoliko vlada nastavi sa kontroverznim planom ograničavanja ovlašćenja Vrhovnog suda.

Napori nacionalističko-religiozne koalicije premijera Benjamineta Netanyahu da ukine određena ovlašćenja sudu izazvali su masovne proteste širom Izraela i podstakli duboku zabrinutost među saveznicima uključujući i Sjedinjene Države.

Budući da neki aman-

dmani treba da bude ratifikovan u nedjelju i

ponedjeljak, protesti su intenzivirani. Jedan ministar u vlasti je kazao za Rojters da bi vlada mogla ponovo razmotriti reformu pravosuđa ukoliko dođe do veće eskalacije protesta.

Protesti rezervista iz ne-

kih od najelitnijih forma-

cijskih uključujući borbenih pilota i jedinice specijalnih snaga privukli su naročitu pažnju, izazivajući paniku kod šefova odbrane usled bojazni da to rizikuje da kompromituje nacionalnu bezbjednost.

Demonstranti tvrde da

predloži reforme rizikuju da podrži izraelske demokratske vrijednosti i prekrše “nepisani ugovor” sa oružanim snagama, kazao je 51-godišnji Ron Šerf, potpukovnik jedinici za izviđanje pri generalstabu, koji je u rezervi za godine.

“Svaki vojnik koji rizikuje svoj život i ide u misiju to radi za državu koja je definisana kao jevrejska i demokratska”, kazao je on za Rojters. Međutim, ako jedno od toga nestane, ukoliko zemlja prestane da bude jevrejska ili demokratska, to više nije zemlja koja može biti zaštićena”, kazao je on.

Organizatori protesta proslijedili su Rojtersu 300

**Rezervisti odbijaju službu zbog reforme pravosuđa**

Na osnovu člana 32 stav 1 tačka 14 Statuta Univerziteta Crne Gore, u vezi sa članom 41 Pravila doktorskih studija, Senat Univerziteta Crne Gore, u postupku razmatranja prijedloga Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta i utvrđivanja ispunjenosti uslova iz Pravila doktorskih studija za ocjenu prijave doktorske disertacije i dalji rad na disertaciji kandidata mr Antona Đokaja, na prijedlog Odbora za doktorske studije, na sjednici održanoj 23.6.2023. godine, donio je sljedeću

## O D L U K U

### I

**Utvrđuje se da su ispunjeni uslovi iz člana 38 Pravila doktorskih studija za ocjenu doktorske teze i dalji rad na disertaciji „Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru“ kandidata mr Antona Đokaja.**

### II

**Imenuje se Komisija za ocjenu navedene doktorske disertacije, u sastavu:**

1. Dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore,
2. Dr David Kaljaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore,
3. Dr Miodrag Matejević, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,
4. Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore,
5. Dr Đordje Vučadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

### III

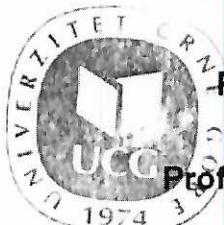
Komisija iz stava II dužna je da Vijeću organizacione jedinice podnese Izvještaj koji sadrži ocjenu doktorske disertacije i poseban izvještaj o procjeni orginalnosti doktorske disertacije, u roku od 45 dana od dana imenovanja Komisije.

### IV

Odluka stupa na snagu danom donošenja.

Broj: 03-3361/2

Podgorica, 23.6.2023. godine



PREDsjEDNIK SENATA

B601H05

Prof. dr Vladimir Božović, rektor



Univerzitet Crne Gore  
adresa / address: Cetinjska br. 2  
81000 Podgorica, Crna Gora  
telefon / phone: 00382 20 314 255  
fax: 00382 20 314 230  
mail: rektorat@acme.  
web: www.ucg.ac.me  
*University of Montenegro*

Broj / Ref 03 - 9619

Datum / Date 16.10.2017

Na osnovu člana 72 stav 2. Zakona o visokom obrazovanju ("Službeni list Crne Gore" br. 44/14, 47/15, 40/16, 42/17) i člana 32 stav 1 tačka 9. Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 16. oktobra 2017. godine, donio je

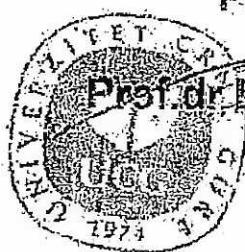
## ODLUKU O IZBORU U ZVANJE

Dr Darko Mitrović bira se u akademsko zvanje redovni profesor za oblast Matematička analiza i primijenjena matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu i na nematičkim fakultetima, na neodređeno vrijeme.

Senat Univerziteta Crne Gore

Predsjedavajući

Prof.dr Danilo Nikolić, v.f.rektora



## Jezici

1. Maternji: Južno-slovenski jezici (crnogorski, srpski, bosanski, hrvatski)
2. Tečno: Engleski, Ruski
3. Dobro: Noreški

## Mentorski rad

### Mentorstvo na doktoratu

1. Student: Jelena Aleksić (<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=139636>)  
PhD teza:

Zakoni sačuvanja u heterogenim sredinama  
odbranjeno 16.10.2009. na Sveučilištu u Novom Sadu

Ko-mentor: Darko Mitrović

## Naučni projekti

1. Od 2008-2012, Darko Mitrović je lokalni koordinator DAAD projekta "Center of Excellence for Applications of Mathematics".  
Web-page: <http://www.uni-due.de/mathematik/daad/index.html>
2. Darko Mitrović je rukovodilac projekta "Advekciono-difuzione jednačine u heterogenim sredinama" finansiranog od strane Ministarstva nauke Crne Gore u periodu 2012-2015.
3. Darko Mitrović je rukovodilac bilateralnog projekta "Problemi tokova na mnogostrukostima" finansiranog od strane Ministarstva nauke Crne Gore i Ministarstva nauke Austrije u periodu 2015-2017.
4. Darko Mitrović je bio rukovodilac hrvatsko-crnogorskog bilateralnog projekta "Transport u izrazito heterogenim sredinama" finansiranog od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske i Ministarstva nauke Crne Gore u periodu 2012-2014.

## Predavanja po pozivu

1. Mitrović, D.: Singular solutions for systems of conservation laws, Entropy and singular solutions to conservation laws: Pressureless Gas dynamics and other applications, Morgantown, USA, 26.-28.09.2014. (<http://math.wvu.edu/entropy2014/>)

## Bibliografija.

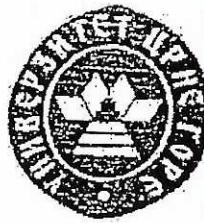
### E-SCL i SCI časopisi

27. Kališč, H.; Mitrović, D.; Nordbotten, J.: Rayleigh-Taylor instability of immiscible fluids in porous media, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, doi:10.1007/s00161-014-0408-z
26. Mišur, M.; Mitrović, D.: On a generalization of compensated compactness in the  $L^q \times L^{\frac{q}{p}}$ -setting, *Journal of Functional Analysis*, 268 (2015), 1904-1927.
25. Andreianov, B.; Mitrović, D.: Entropy conditions for scalar conservation laws with discontinuous flux revisited, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire*, doi:10.1016/j.anihpc.2014.08.002
24. Mitrović, D.; Nordbotten, J.M.; Kališč, H.: Dynamics of the interface between immiscible liquids of different densities with low Froude number, *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 15 (2014), 361-366
23. Aleksić, J.; Mitrović, D.: Strong traces for averaged solutions of heterogeneous ultra-parabolic transport equations, *J. of Hyperbolic Differential Equations* 4 (2013), 659-676.
22. Lazar, M.; Mitrović, D.: On an extension of a bilinear functional on  $L^p(\mathbb{R}^d) \otimes E$  to a Bochner space with an application on velocity averaging, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 351 (2013), 261-264.
21. Mitrović, D.: On a Leibnitz type formula for fractional derivatives, *Filomat* 27:6 (2013), 1141-1146.
20. Kališč, H.; Mitrović, D.: Singular solutions for the shallow water equations, *IMA J. Appl. Maths.* 77 (2012), 340-350.
19. Kališč, H.; Mitrović, D.: Singular solutions of a fully nonlinear 2x2 system of conservation laws, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 55 (2012), 711-729.
18. Lazar, M.; Mitrović, D.: Velocity averaging – general framework, *Dynamics of Partial Differential Equations*, Vol.9, No.3, 239-260; 2012.
17. Antonic, N.; Mitrović, D.: H-distributions—an extension of the H-distributions in the  $L^p$ -setting, *Volume 2011* (2011), Article ID 901084, 12 pages, doi:10.1155/2011/901084.
16. Mitrović, D.; Ivec, I.: A Generalization of SHS-measures and Application on Purely Fractional Scalar Conservation Laws, *Communication on Pure and Applied Analysis*, Volume 10, Number 6, November 2011, 1617-1627.
14. Lazar, M.; Mitrović, D.: The velocity averaging for a heterogeneous heat type equation, *Mathematical Communications*, 16(2011), 271-282.

2. Holden, H.; Karlsen, K.H.; Mitrovic, D.: Zero diffusion dispersion limits for scalar conservation law with discontinuous flux function, *International Journal of Differential Equations*, Volume 2009, Article ID 279818, 33 pages.
3. Bojkovic, V.; Mitrovic, D.: A characterization of Riemann invariants for  $2 \times 2$  system of hyperbolic conservation laws, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, Vol. 1, Number 3 (2008), 579-586
4. Mitrovic, D.; Susic, J.: Global in time solution to Hopf equation and applications on non-strictly hyperbolic system of conservation laws, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2007(2007), No. 114, 1-22
5. Mitrovic, D.: Singularity formation for a pressureless gas dynamics system of conservation laws, *IEEE Catalog No. 06EX1351, ISBN 5-9631-0226-7, Days on Diffraction 2006, 197-208, [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs\\_all.jsp?arnumber=4154034](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=4154034)*
6. Danilov, V. G.; Mitrovic, D.: New approach to shock generation for conservation laws. Example: global solution to Hopf equation, *Matematicki Vesnik*, 56 (2004), No. 1-2, 23-46.
7. Mitrovic, D.: Uniform in  $t \in \mathbb{R}$  description of shock wave formation process and application to convex scalar conservation law, *Mathematica Montisnigri*, Vol XVII (2004) 37-55.

# УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ

Ул. Цетињска бр. 2  
П. фах 99  
81000 ПОДГОРИЦА  
ЦРНА ГОРА  
Телефон: (020) 414-255  
Факс: (020) 414-230  
E-mail: rektor@ac.me



# UNIVERSITY OF MONTENEGRO

Ul. Cetinjska br. 2  
P.O. BOX 99  
81 000 PODGORICA  
MONTENEGRO  
Phone: (+382) 20 414-255  
Fax: (+382) 20 414-230  
E-mail: rektor@ac.me

Број: 08-1905  
Датум, 25.10.2012.г.

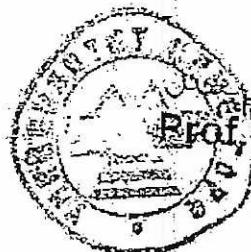
Ref: \_\_\_\_\_  
Date: \_\_\_\_\_

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ  
Природно-математички факултет  
Споменик  
Подгорица, 01. 11. 2012. год.

На основу члана 75 stav 2. Zakona o visokom obrazovanju (Sl. list RCG, br. 60/03 i Sl. list CG, br. 45/10 i 47/11) i člana 18 stav 1 tačka 3 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore, na sjednici održanoj 25.10.2012. godine, donio je

## ODLUKU O IZBORU U ZVANJE

Dr DAVID KALAJ bira se u akademsko zvanje redovni profesor Univerziteta Crne Gore za predmete: Kompleksna analiza 2 (studijski program Matematika), Analiza 3 (studijski program Računarske nauke) i Analiza 3 (studijski program Fizika) na Prirodno-matematičkom fakultetu.



REKTOR

Prof. dr Predrag Miranović

- Reakcija i koniplokačna analiza (kurs na poslijeričnom studiju za doktorskog studenta).
- Viša analiza (kurs na doktorskim studijima na PMF).
- Harmonijske funkcije, doktorski kurs, Prirodno-Matematički fakultet, Beograd (2014).

Mentorski na doktorskim disertacijama

2013. Marijan Marković (Beogradski univerzitet).  
 2014. Olganjije Vučadinović (Beogradski univerzitet).  
 Mentorski na magistrskim tezama  
 2016. Olganjije Vučadinović (UCG).

### C) NAUČNO STRAŽIVACKI INTERES:

Geometrijska teorija funkcija: Harmonijske funkcije, Kvažikonformna preslikavanja, Holomorne funkcije, Funkcionalni prostori: Hardijevi i Bergmanovi prostori, Parcijalne diferencijalne jednačine: Poissonova, Laplaceova, Elliptičke PDE, Diferencijalna geometrija: Harmonijske površi, Minimalne površi, Izoperimetrična nejednakost itd.

#### \* Upravljanje projektiima

1. Rukovodilac nacionalnog projekta Analiza na mnogostrukosti i primjene (2011-2015), koga finansira Ministarstvo znanosti Republike Crne Gore. Projekat je čine razotvoren matematičari iz Crne Gore. Pri tome je projekt pri evaluaciji dobio maksimalan broj poena od strane međunarodnih eksperta. (Nagrada Ministarstva znanosti za najbolji načeni projekat za 2013 godinu)

2. Trenutno je rukovodilac dva bivalazitralna projekta jednog sa Kinom i drugog sa Hrvatskom.

3. Bio je rukovodilac uspješnog nacionalnog projekta Analiza na mnogostrukositi (2008-2011).

#### \* Izvod iz bibliografije

Publikovanji (ukupno 65 radova), između ostalog, u sledećim vrhunskim matematičkim časopisima: Advances in Mathematics, Transactions of American Mathematical Society, Calculus of Variations and PDE, International mathematics research notices, Proceedings of American Mathematical Society, Journal D' Analyse Math. Israel, Journal of Math. Mathematics Zeitchrift, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze, Annales Academiae Scientiarum Fennicæ Mathematica, Atti di Matematica Pura ed Applicata, Pacific Journal of Mathematics.  
 U pripremi su još 6 radova koji se nalaze na arxiv.org serveru.

*Sloves, Turkish journal of math, Mathematica slovaca, Bulletin of London math society,  
Journal of Indian Academy of Mathematics etc.*

*Izvršenje ekspertize za projekte:*

- Evaluator za projekte iz oblasti matematike koje je raspisalo Israel science foundation države Šrilanku 2014.
- Evaluator za projekte iz oblasti matematike koje je raspisalo Israel science foundation države Izrael na period 2012-2015.
- Evaluator za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Israel science foundation države Izrael na period 2015-2018.
- Evaluator za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Ministarstvo projekata i napake Republike Srbije na period 2012-2013.
- Evaluator za projekte FONDECYT, Chile 2014.

Mathematics 1, Mathematics 4, (Study programme for secondary school teachers in Albanian Language) undergraduate course,  
 Mathematical Analysis 3, undergraduate course,  
 Real and Complex Analysis, graduate course  
 Full professor, University of Montenegro

#### Mentorstvo na doktorskim disertacijama:

- 2013; Marijan Marković (Beogradski univerzitet)
- 2014; Đorđije Vučadinović (Beogradski univerzitet)
- 2016; Đorđije Vučadinović

#### DODATNE INFORMACIJE

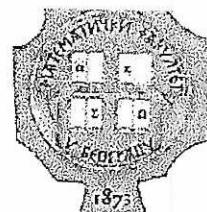
- Born: December 11, 1971; Podgorica, Yugoslavia  
 Citizenship: Montenegrin  
 Languages: Albanian (native, command), Serbian (native, command), English (fluent), Russian (passive), Italian (passive).  
 Computer skills: LaTeX, C++, Mathematical software  
 Projects: 1) Establishment and management of Study programmes for teacher education at Albanian since 2004.  
 2) PI of the national project Analysis on manifolds (2008-2011).  
 3) PI of the national project Analysis on manifolds and applications (2012-2015).

#### RADOVIT

1. D. Kalaj, *Equivalent harmonic mappings between Jordan domains*, Publ. Inst. Math., Nauk. Ser. 69(83), 103-112 (2001).
2. D. Kalaj, *On the Nehari's conjecture for harmonic mappings*, Mathematica Montisnigri Vol. X(IV)(2001)-89-94.
3. D. Kalaj, *The Jacobian of homeomorphism and of its boundary values*, Revue Roumaine De Mathématiques Pures Et Appliquées Tome XLVII, N° 5-6 (2002).
4. D. Kalaj, *On harmonic diffeomorphisms of the unit disk onto a convex domain*, Complex Var. Theory Appl. 48: No. 2, 173-187 (2003).
5. D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic functions between convex domains*, Publ. Inst. Math., Nauk. Ser. 76(90), 5-20 (2004).
6. D. Kalaj, *On the Nehari's conjecture for harmonic mappings in  $\mathbb{R}^d$  and in  $\mathbb{R}^2$* , Publ. Inst. Math. (Beograd) (8-9) 75(89) (2004), 139-146.
7. D. Kalaj, M. Pavlović, *Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of a half-plane* Adv. Acad. Sci. Berlin. Math. 30 (2005), no. 1, 59-155.
8. D. Kalaj, *On the Nehari's conjecture for harmonic mappings in  $\mathbb{R}^d$  and in  $\mathbb{R}^2$* , Israel J. Math. 150 (2005) 241-251.
9. D. Kalaj, M. Mateljević, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between compact surfaces*, J. Anal. Math. 100 (2006), 117-132.
10. S. A. Albeverio, S.-R. Kuksin and D. Kalaj, *Application of convolution to the Schrödinger operator on periodic and random functions*, Filomat 26(2) (2012), 113-124.
11. D. Kalaj, *On a certain subclass of  $L^p(\Omega)$  defined by the quasiconformal mapping*, Filomat 26(2) (2012), Issue 2, Pages 1-11, (2012).
12. D. Kalaj, *On a certain class of quasiconformal mappings between Jordan domains in  $\mathbb{R}^2$* , Filomat 26(2) (2012), 253-268.

30. D. Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between surfaces. *Nipponish. Math.*, 167, No. 2, 205-220 (2013).
31. D. Kalaj, V. Mihalević, Subharmonicity of the modulus of quasiregular harmonic mappings. *Journal of mathematical analysis and applications* Volume 379, Issue 2, 15 July 2011, Pages 783-787.
32. D. Kalaj, On Kellogg's theorem for quasiregular mappings. *Glasg. Math. J.* 54, No. 3, 599-603 (2012).
33. D. Kalaj, On some integrable operators related to Poisson equation, *Integral Equations Oper. Theory* 72, No. 4, 563-573 (2012).
34. D. Kalaj, State angle limit of a certain class of self-mappings of the unit disk, *J. Approx. Theory* 164, No. 6, 815-822 (2012).
35. D. Kalaj, *Calderon transform and Poisson's equation*, *Advances in Mathematics* 233, No. 1, 213-242 (2012).
36. D. Kalaj, On quasiconformal self-mappings of the unit disk and elliptic PDEs in the plane. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A*, Volume 143, Issue 04 / August 2013 pp 831-849.
37. D. Kalaj, M. Marković, Optimal estimates for the gradients of harmonic functions in the unit disk, *Complex Anal. Oper. Theory* 7, No. 4, 1167-1182 (2013).
38. D. Kalaj, A priori bounds of gradient of a solution to certain differential inequality and quasiregular mappings, *J. Anal. Math.* 119, 53-88 (2013).
39. D. Kalaj, S. Ponnusamy, M. Vuorinen, Radii of  $\alpha$ -convexity of harmonic functions, *Complex Var. Elliptic Equ.* 59, No. 4, 539-552 (2014).
40. D. Kalaj, M. Marković, An ellipticity type inequality type inequality for harmonic mappings of the unit disk onto surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.* 39, No. 1, 565-580 (2014).
41. D. Kalaj, Gauss map of a harmonic surface, *Indagationes Mathematicae* Volume 24, Issue 2, March 2013, Pages 415-427.
42. D. Kalaj, M. Vuorinen, Bergman projection and Besov space  $S^{\alpha}_{\beta, p}$ , *J. Math. Mathematical reports*, the 4<sup>th</sup> issue of 2013.
43. D. Kalaj, Marijan Marković, Norms of the Bergman projection, *Mathematical Reports*, vol. 15, no. 4, pp. 527-528, 2013.
44. D. Kalaj, N. Čučić, On compactness for the derivatives of analytic functions in the unit disk, *Comput. Methods Funct. Theory* 13, No. 2, 189-203 (2013).
45. D. Kalaj, M. Marković, Norm of Bergman projection *Bull. Scand.* 115, No. 1, 143-160 (2013).
46. D. Kalaj, Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces, *Centrol. Eur. J. Partial Differ. Equ.* 51, No. 1-2, 403-424 (2014).
47. D. Kalaj, S. Ponnusamy, Polyharmonic mappings and a C. C. Nitsche type conjecture, *Glas. Mat. Ser. III, 49*, No. 1, 163-178 (2014).
48. D. Kalaj, Radial extension of a bi-Lipschitz parametrization of a rectifiable Jordan curve, *Complex Var. Elliptic Equ.* 59, No. 6, 809-825 (2014).
49. D. Kalaj, On harmonic functions on surface with positive Gauss Curvature and its Schur's lemma, *Kochi J. L. Math.* 44, No. 5, 1585-1593 (2014).
50. D. Kalaj, Ken-Ichi Sakai, Quasiconformal harmonic mappings and a convex domain revisited, *Albanian Journal of Mathematics*, Vol 7, No 2 (2013), September 2013.
51. D. Kalaj, On quasiconformal harmonic maps between surfaces, *International Math. Research Notices* 2015, No. 2, 355-380 (2015).
52. D. Kalaj, On A. C. C. Nitsche type inequality for hyperelliptic spaces, *J. Geometric Anal.* 24, No. 3, 931-943 (2014).
53. D. Kalaj, Stolarsky-Szegő-Milinovici's operator of bilinear forms, Some applications in the unit ball, To appear in *Proceeding of American Mathematical Society* (2015).
54. D. Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between domains, To appear in *Pacific Journal of Mathematics* (2015).
55. D. Kalaj, Djordje Pejčić, The norm of the Bergman projection, To appear in *Journal of operator theory* (2015).

82. D. Kalaj: On the univalent solution of PDE  $\Delta u = f$  between spheres, in: "The book of abstracts of Harmonic Analysis and partial Differential Equations", June 27-July 1, 2005, Kiel, Germany.
83. D. Kalaj: Harmonic and quasiconformal maps, Extremal Problems in Complex and Real Analysis, Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia May 22-26, 2007. The book of abstracts.
84. D. Kalaj: Quasiconformal harmonic maps, Seminar: Mathematical Colloquium, Beograd 11.05.2007. <http://www.mi.sanu.ac.yu/colloquia/semath07/prog>
85. D. Kalaj: On the univalent solution of PDE  $\Delta u = f$  between spherical annuli, Seminar: Differential Equations in Theory and Applications 06.06.2007 <http://www.math.psu.edu/seminars/dittu/>, Predayanje po pozivu
86. D. Kalaj: On quasiconformal harmonic mappings, Congress in memory of Adrián Doubtka, Paris, France May 2008, Poster.
87. D. Kalaj: Boundary correspondence under a.c. harmonic mappings between Jordan domains, Mini conference on quasiconformal harmonic mappings, Beograd, Serbia, 2009, September, Pređavajuće po pozivu.
88. D. Kalaj: On quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane, Helsinki seminar on Analysis, October 2010, pređavajuće po pozivu.
89. D. Kalaj: On quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane, Turkey seminar on Analysis, October 2010, pređavajuće po pozivu.
90. D. Kalaj: Determination of annuli which smallest mean distortion on Riemann surfaces, Workshop on Quasiconformal mappings and Mappings of finite distortion, Prague, September 2011, Pređavajuće po pozivu.
91. D. Kalaj: Deformation of annuli under small finite distortion on Riemann surfaces and generalization of J. C. C. Nitsche Conjecture, Workshop on Complex Analysis, Beograd, February 2012, Pređavajuće po pozivu.
92. D. Kalaj: Deformations of annuli on Riemann surfaces and the generalization of Nitsche conjecture and Quasiconformal harmonic mappings, Pređavajuće po pozivu, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, Romania, Ploiești, 2012 <http://imar.ro/RuRinSem2012/conf.php>, Romanian English seminar.
93. D. Kalaj: Deformations of annuli on Riemann surfaces and the generalization of Nitsche conjecture, The 6th European Congress of Mathematics, 2012, Poster.
94. Dr. M. Kalaj: Cauchy transform and Poisson equation, Turku analysis seminar, Finland (4.10.2012) <http://users.tul.cz/petek/seminar/index.html>
95. David Kalaj, Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces, "Conference on Riemann surfaces and Teichmüller groups", held at Osaka University, Japan, from January 12 to January 14, 2013.
96. David Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between surfaces, Conference of Geometric function theory, October 2013, Beograd.
97. David Kalaj, Muckenhoupt weights and Lindelöf theorem for harmonic mappings, March 2014, Helsinki seminar of analysis, Helsinki 2014.
98. David Kalaj Quasiconformal harmonic mappings between surfaces, March 2014, Helsinki seminar of analysis, Helsinki 2014.
99. David Kalaj, Muckenhoupt weights and Lindelöf theorem for harmonic mappings, ICM, August, 2014, Seoul, Korea, Short communication.
100. David Kalaj, Harmonic and quasiconformal mappings and generalizations, September, Mathematics Science Huangpu University, P.R.China, January 26, 2015.
101. David Kalaj, On quasi-inversions, School of Mathematics and Science Huazhong University, P.R.China, January 27, 2015.
102. David Kalaj, Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces, School of Mathematical Science Hunan University, P.R.China, January 28, 2015.



Број: 1/ММ  
Датум: 30.05.2023.г.

Универзитет у Београду-Математички факултет издаје следећу

## ПОТВРДУ

Овим се потврђује да је академик Миодраг Матељевић изабран у звање редовног професора 29.03.1995. године.

Потврда се издаје на лични захтев именованог, ради чланства у комисији за оцену докторске дисертације кандидата Антона Ђокеја.

ДЕКАН  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ-  
МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА  
Проф. др Зоран Ракић



- Associate Professorship during 1988/89. at Wayne State University, Detroit.

#### **PUBLICATIONS:**

- He published about 140 scientific papers in well internationally known journals including Journal d'Analyse, Studia mathematica, Pacific Journal of Mathematics, Mich. Math. J., J. Math. Anal. Appl., Proc. Amer. Math. Soc., Proc. Edinb. Math. Soc., J. Math. Chem., Lect. Notes Math., Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., Potential Analysis, MATCH, etc.

He delivered about 30 invited lectures and about 10 plenary lectures: IWWA USA, Nevanlinna Colloquium Switzerland, 4 lectures at Finish-Rumanian seminar, Oberwolfach, Grötzsch conference, invited by Polish and Bulgarian academy of science,...; His paper are quoted about 1670 times.

The results with proofs, concerning Teichmuller problem, Gehring's problem, the isoperimetric inequality, harmonic and analytic functions, are cited in known Monograph; see, for example, p.100,

- Lectures on Quasiconformal Mappings: Second Edition Lars V. Ahlfors with additional chapters by C. J. Earle and I. Kra, M. Shishikura, J. H. Hubbard, University Lecture Series 2006; 162 pp; Volume 38,

and

- E Reich, Extremal Quasiconformal Mappings of the Disk, Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Volume 1, edited by Kuhnau, 2002 Elsevier Science B.V.

Among the other things, he has solved Sinai's problem (Sinai is awarded with Abel prize) and he has showed that HQC mapping between Lyapunov domains are bi-lipshitz (well known problem in HQC-theory) recently.

#### **TEACHING RESPONSIBILITIES:**

- Courses taught include Mathematica I & II, Analysis I & II, Theory of Real and Complex functions, Complex Analysis
- Graduated courses taught include: Analysis on manifolds (USA), Complex Analysis(USA), Conformal invariant, Quasiconformal mappings, Complex dynamics, etc.

#### **INVITED LECTURE SERIES:**

1. In the Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, during Oct., 2001
2. In Warwick during 30 Nov - 30 Dec., 2003
3. In Warwick during 5 Dec - 20-Dec., 2004
4. Special course in "Quasiconformal mapping and Teichmuller spaces" na Scola Normala Superioara, Bucharest, 2004.
5. In the University of Helsinki, october 2005.
6. Several plenary lectures at Helsinki-Turku Seminar, october 2005.
7. Five invited lecture at INTERNATIONAL WORKSHOP ON HARMONIC MAPPINGS AND HYPERBOLIC METRICS, (IWHMHM09), DECEMBER 10 - 19, 2009

List A

1. Mateljević, M., *On linked Jordan curves in  $R^j$* , Mat. Vesnik 12 (27) (1975), 285-286.
2. Mateljević, M., *The isoperimetric inequality and some extremal problems in  $H^r$* , Lect. Notes Math. 798 (1980), 364-369.
3. Mateljević, M., Pavlović, M., *On the integral means of derivates of the atomic function*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 86 No.3 (1982), 455-458.
4. Mateljević, M., Pavlović, M., *Behavior of power series with positive coefficients and Hardy Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 87 No.2 (1983), 309-316.
5. Mateljević, M., Pavlović, M.,  *$L^p$ -behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia Mathematica Vol. 77 (1983), 219-237.
6. Mateljević, M., Pavlović, M., *New proofs of the isoperimetric inequality and some generalizations*, J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), 25-30.
7. Mateljević, M., Pavlović, M., *Multipliers of  $H^r$  and  $BMOA$* , Pacific Journal of Mathematics 146 (1990), 71-84.
8. Mateljević, M., *An extensions of the area theorem*, Complex Variables 15 (1990), 155-157.
9. Mateljević, M., Pavlović, M., *Some inequalities of isometric type concerning analytic and subharmonic functions*, Publ. Inst. Math. Belgrade 50 (69) (1991), 123-130.
10. Mateljević, M., Pavlović, M., *An extension of the Forelli-Rudin theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc. 2 36 (1993) No.3, 375-389.
11. Mateljević, M., *Note on Schwarz lemma, curvature and distance*, Coll. Sci. papers of the Faculty of Science Kragujevac 16 (1994), 47 – 51, Zbornik konferencije.
12. Mateljević, M., *Dual of the Bergman space defined on a hyperbolic plane domain*, Publ. Inst. Math. Belgrade 56 (70) (1994), 135-139.
13. Mateljević, M., Pavlović, M., *The best approximation and composition with inner functions*, Mich. Math. J. 42 (1995), 367-378.
14. Mateljević, M., *Estimates for gradient,  $BMO$  and Lindel of theorem*, Publ. Inst. Math. Belgrade 58 (72) (1995), 162-166.
15. Mateljević, M., Marković, V., *The unique extremal QC mapping and uniqueness of Hahn-Banach extensions*, Mat. Vesnik 48 (1996), 107-112.
16. Božin, V., Marković, M., Mateljević, M., *The unique extremality in the tangent space of Teichmuller space*, Integral Transforms and Special Functions 6 (1997), 223-227.
17. Marković, V., Mateljević, M., *New version of Grotzsche principle and Reich-Strebel inequality*, Mat. Vesnik 49 (1997), 235-239.

34. M. Mateljević, M. Arsenović and V. Kojić, *On Lipschitz continuity of harmonic quasiregular maps on the unit ball in  $R^n$* , Ann. Acad. Sci. Fenn., Vol. 33, No 1, 2008, 315-318.
35. M. Mateljević, *Versions of Koebe 1/4 theorem for analytic and quasiregular harmonic functions and applications*, Publications de l'institut Mathématique, Nouvelle série, tome 84 (98) (2008), 61-72.
36. M. Mateljević, *Unique extremality of quasiconformal mappings*, Journal d'Analyse Math., Vol 107, No 1, 39-63, 2009.
37. V. Božin, M. Mateljević, *Energy of graphs and orthogonal matrices*, 87-96, in *Approximation and Computation - In Honor of Gradimir V. Milovanović*, Editors: W. Gautschi, G. Mastroianni, Th.M. Rassias, Series: Optimization and Its Applications, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg, Vol 42, 2010.
38. Miodrag Mateljević, Miloš Arsenović and Vesna Manojlović, *Lipschitz-type spaces and harmonic mappings in the space*, Ann. Acad. Sci. Fenn-M, Vol. 35, No. 2, 2010, 379-387.
39. Miodrag Mateljević, Ivan Anić, Stephen Taylor, *Asymptotic curvature bounds for conformally flat metrics on the plane*, Filomat, Vol 24, No 2, 2010, 93-100.
40. Miodrag Mateljević, Vladimir Božin, Miljan Knežević, *Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains*, Filomat, Vol 24, No 3, 2010, 111-124.
41. Vladimir Božin, Miodrag Mateljević, *Some counterexamples related to the theory of HQC mappings*, Filomat, Vol 24, No 4, 2010, 25-34.
42. David Kalaj, Miodrag Mateljević, *Harmonic quasiconformal self-mappings and Möbius transformations of the unit ball*, Pacific J. Math., Vol. 247, No. 2, 2010, 389-406.
43. David Kalaj, Miodrag Mateljević, *On absolutely conformal mappings*, Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol 77, No 1-2, 2010, 33-38.
44. M. Mateljević and M. Vuorinen, *On harmonic quasiconformal quasi-isometries*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 178732, 19 pages doi:10.1155/2010/178732; arXiv: 0709.4546v1
45. Miodrag Mateljević, Vladimir Božin, Ivan Gutman, *Energy of a polynomial and the Coulson integral formula*, J Math Chem, Vol 48, No 4, 2010, pp 1062-1068, DOI10.1007/s10910-010-9725-z
46. Kalaj, D., Mateljević, M., *On quasiconformal harmonic surfaces with rectifiable boundary*, Complex Analysis and Operator Theory, Vol 5, No 3, 2011, pp 633-646, DOI: 10.1007/s11785-010-0062-9.
47. Kalaj, D., Mateljević, M., *On certain nonlinear elliptic PDE and quasiconformal maps between Euclidean surfaces*, Potential Analysis, Vol 34, No 1, 2011, pp 13-22, DOI: 10.1007/s11118-010-9177-x.
48. David Kalaj, Miodrag Mateljević, *Quasiconformal Harmonic Mappings and Generalizations*, J. Analysis, Volume 18 (2010), 239-260, Proceedings of the ICM2010 Satellite Conference International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings (HQM2010) Editors: D. Minda, S. Ponnusamy, and N. Shanmugalingam.
49. Miodrag Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps*, Завод за уџбенике, Београд 2012.

67. Mateljević, M., Pavlović, M., *An extension of the Hardy-Littlewood inequality*, Mat. Vesnik sv. 1 (1982), 55--61.
68. Mateljević, M., Pavlović, M., *Duality and Multipliers in Lipschitz spaces*, Proc. 2-th Int. Conf. on Complex Analysis and its Applications, Varna, May 29 (1983).
69. Mateljević, M., Pavlović, M.,  *$L_p$ -behaviour of area and lengthfunction and Lipschitz spaces*, C.R. Acad. Bul. Sci. 37 No. 8 (1984).
70. Mateljević, M., Pavlović, M.,  *$L_p$ -behaviour of power series with positive coefficients and some spaces of analytic functions*, Proc. III Int. Conf. on Contractive theory of functions, Varna, May 27-June 2 (1984), 599--604.
71. Mateljević, M., Pavlović, M., *Some inequalities of isoperimetric type for the integral means of analytic functions*, Mat. Vesnik sv. 1 37 (1985), 78--80.
72. Mateljević, M., Pavlović, M., *On Hardy-Lipschitz spaces*, Mat. Vesnik sv. 1 37 (1985), 81--84.
73. Mateljević, M., *Bounded projections and decompositions in spaces of holomorphic functions*, Mat. Vesnik sv. 4 38 (1986), 521--528.
74. Mateljević, M., *Holomorphic fixed point theorem on Riemann surfaces*, Math. Balkanica 12 (1-2) (1998), 1-4.
75. Mateljević, M., *Some inequalities of isoperimetric type concerning analytic functions*, Math. Balkanica (1994).
76. Mateljević, M., *Note on Schwarz lemma, curvature and distance*, Coll. Sci. papers of the Faculty of Science Kragujevac 16 (1994), 47--51, Zbornik konferencije.
77. Mateljević, M., *Dirichlet's principle, uniqueness of harmonic maps and related problems*, Proc Symp. Contemporary Math., Univ. of Belgrade, 1998, 251--267.
78. M. Mateljević, Schlicht discs, Bloch theorems, Bloch-Bers space and harmonic maps, Zbornik radova posvećen akad. V. Periću, 2004, 66 -- 79, predavanje po pozivu redakcija, editor Prof. Danijel. A. Romano
79. M. Mateljević, *Unique extremality III*, Warwick Preprint: 08/2005

List B, from 2012-

1. David Kalaj, Marijan Marković and Miodrag Mateljević, *Carathéodory and Smirnov Type Theorems for Harmonic Mappings of the Unit Disk Onto Surfaces*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Volumen 38, 2013, 1–16.
2. David Kalaj, Miodrag Mateljević, *On Conformal, Harmonic Mappings and Dirichlet's Integral*, Filomat 25:2 (2011), 91–108.
3. David Kalaj, Miodrag Mateljević, *(K, K') – quasiconformal Harmonic Mappings*, Potential Anal (2012) 36:117–135.
4. Miodrag Mateljević, *Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains*, Filomat 26:3 (2012), 479–510.

- „Matematika i primene“ (4 – 5. novembar 2016.), Univerzitet u Beogradu – Matematički fakultet, 2017, 1-41.
23. Miodrag Mateljević, *Fragmenti sećanja na Vojina Dajovića*, Nastava matematike, LIX, 3 (2014), 3–8.
  24. Miodrag Mateljević, *Distortion of quasiregular mappings and equivalent norms on Lipschitz-type spaces*, Abstract and Applied Analysis Volume 2014 (2014), Article ID 895074, 20 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/895074>, <http://www.hindawi.com/journals/aaa/2014/895074/>
  25. S. H. Chen, M. Mateljević, S. Ponnusamy and X. Wang, *Schwarz-Pick lemma, equivalent modulus, integral means and Bloch constant for real harmonic functions*, Acta. Math. Sinica, Chinese Series, Vol. 60, No. 6, 2017, 1025-1036.
  26. M. Mateljević, *Quasiconformal maps and Teicmuller theory - extremal mappings*, Overview, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques, 129-172, 2014.
  27. M. Mateljević, *The International Conference Geometric Function Theory PREFACE* (Editorial Material), Filomat 29:2 (2015).
  28. M. Mateljević, *Note on rigidity of holomorphic mappings and Schwarz and Jack lemma* (ResearchGate 2015, Version 2, 2018), accepted for publication in Filomat.
  29. M. Mateljević, *Schwarz lemma and distortion for harmonic functions via length and area*, arXiv:1805.02979v1 [math.CV] 8 May 2018, accepted for publication in Potential Analysis, (DOI: 10.1007/s11118-019-09802-x), Online the article is published 2020-02-07; see <https://link.springer.com/article/10.1007/s11118-019-09802-x>
  30. [https://www.researchgate.net/profile/Miodrag\\_Mateljevic](https://www.researchgate.net/profile/Miodrag_Mateljevic)
  31. M. Mateljević, *Geometric function theory I* (see [www.matf.bg.ac.rs/~miodrag](http://www.matf.bg.ac.rs/~miodrag))
  32. M. Mateljević, *Elliptic equations and QC maps* (see [www.matf.bg.ac.rs/~miodrag](http://www.matf.bg.ac.rs/~miodrag))
  33. Miodrag Mateljević, *Realna, kompleksna analiza i Hilbertovi prostori*, maj 2015 (рукопис је на сајту [www.matf.bg.ac.rs/~miodrag](http://www.matf.bg.ac.rs/~miodrag))
  34. 1. M. Mateljević, Schwarz type inequalities for harmonic and related functions in the disk and the ball, IV Conference of Mathematics and Computer Science (Konferencja Matematyczno-Informatyczna) Congressio-Mathematica September 20-23, 2018, at Mierki,<http://wmii.uwm.edu.pl/congressiomath>, Current Research in Mathematical and Computer Sciences II Publisher UWM, Olsztyn2018, pp. 157–194
  35. M. Mateljević, Schwarz lemma and distortion for harmonic functions via length and-area, arXiv:1805.02979v1 [math.CV] 8 May 2018, *Potential Analysis volume 53*, pages 1165–1190(2020)
  36. M. Mateljević, A. Khalfallah, Schwarz lemmas for mappings with bounded Laplacian, arXiv:1810.08823v1 [math.CV](<http://arxiv.org/abs/1810.08823>), On some Schwarz type inequalities, J. Inequal. Appl. (2020) 2020:164.
  37. M. Mateljević, M. Svetlik, Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings, Submitted on 20 Aug 2018, arXiv:1808.06647v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1808.06647>, APPL ANAL DISCR MATH, AADM) Applicable Analysis and Discrete Mathematics available online at <http://pefmath.etf.rs> Appl. Anal. Discrete Math. 14(2020), 150–168, <https://doi.org/10.2298/AADM200104001M>
  38. M. Mateljević , Neki aspekti teorije potencijala, vizualizacija, varijacioni račun i primene, Akademikske besede knj. 2, 2019., redovinih učlanova SANU koji su izabrani 8. novembra 2018 god. Izdavač Srpska akademija nauka i umetnosti, 73-110, ISSN 2466-5134

54. Milos Arsenovic, Miodrag Mateljević, Modulus of continuity of normal derivative of a harmonic functions at a boundary point, accepted in Filomat March 2022
55. Adel Khalfallah, Miodrag Mateljević, Estimates of Partial Derivatives for Harmonic Functions on the Unit Disc, accepted in CMFT MS 2207881 March 2022.
56. David Kalaj, Miodrag Mateljević and Iosif Pinelis, Schwarz lemma for real harmonic functions onto surfaces with non-negative Gaussian curvature, accepted for publication in Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society May 2023 .
57. Jelena Gajic, Miodrag Mateljević, Milos Arsenovic,  $H_p$  spaces of separately  $(\alpha, \beta)$ -harmonic functions in the unit polydisc, manuscript 2022



Univerzitet Crne Gore  
adresa i adresa: Cetinjska br. 2  
81000 Podgorica-Crna Gora  
telefon i phone: 00382 20 444 255  
fax: 00382 20 444 230  
mail: rektorat@ucg.ac.me  
web: www.ucg.ac.me  
University of Montenegro

Broj / Ref 03 - 1994

Datum / Date 15.12.2021.

Na osnovu člana 72 stav 2 Zakona o visokom obrazovanju („Službeni list Crne Gore“ br. 44/14, 52/14, 47/15, 40/16, 42/17, 71/17, 55/18, 3/19, 17/19, 47/19, 72/19, 74/20 i 104/21) i člana 32 stav 1 tačka 9 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 15.12.2021. godine, donio je

### O D L U K U O IZBORU U ZVANJE

**Dr Marijan Marković** bira se u akademsko zvanje vanredni profesor Univerziteta Crne Gore za oblast Matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, na period od pet godina.

SENAT UNIVERZITETA CRNE GORE  
PREDsjEDNIK

Prof. dr Vladimir Božović, rektor

## BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA – MARIJAN MARKOVIĆ

### Biografija

Marijan Marković je rođen 21. aprila 1982. g. u Kotoru. Završio je gimnaziju *Slobodan Škerović* u Podgorici 2001. g. Potom je 2005. g. diplomirao na Prirodnno-matematičkom fakultetu UCG.

Na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu je 2. oktobra 2012. g. odbranio magistarski rad pod nazivom *Varijante Kälemanove nejednakosti*. Na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu je 11. juna 2013. g. odbranio doktorsku disertaciju koja nosi naziv *Izoperimetrijska nejednakost i prostori analitičkih funkcija*. Mentor za njenu izradu su bili profesori Miodrag Mateljević i David Kalaj. Disertacija istražuje povezanost izoperimetrijske nejednakosti sa analitičkim i harmonijskim preslikavanjima i njeni djelovi su objavljeni u sljedećim radovima: M. Marković, *A sharp inequality for holomorphic functions on the polydisc*, Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2013), 1693–1704, D. Kalaj, M. Marković, M. Mateljević, *Charahegyory and Smirnov type theorems for harmonic mappings of the unit disk onto surfaces*, Annales Academiæ scientiarum Fennicac, Mathematica **38** (2013), 565–580 i M. Marković, *Sharp inequalities over the unit polydisc*, Journal of Functional Analysis **268** (2015), 2647–2671.

Od decembra 2016. g. zapošlen je kao docent na Prirodnno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore. Angažovan je na Filozofskom fakultetu u Nikšiću na predmetima Matematika I, II i III na učiteljskom studiju, a na PMF-u izvodi nastavu na predmetu Funkcionalna analiza. Prethodno je u periodu od 2005. do 2007. g. bio saradnik u nastavi na Prirodnno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, a u periodu od 2007. do 2010. g. bio je zapošlen na nacionalnom projektu *Kompleksna analiza* na Prirodnno-matematičkom fakultetu UCG. Bio je rukovođilac biletarnog projekta *Konformna i kvazikonformna analiza sa Slovenijom* u periodu od 2018. do 2020. g.

U skorijem vremenu imao je izlaganja na sljedećim konferencijama: M. Marković, *Equality of the Bloch and the Lipschitz norm of a mapping*, Treći centralno-evropski seminar za kompleksnu analizu, Krakov, 12–14 april 2019; M. Marković, *Nonvanishing of extremals in some extremal problems for analytic functions*, Drugi centralno-evropski seminar za kompleksnu analizu, Beč, 12–14 april 2018.

### Bibliografija (od 2015. godine)

- [1] P. Melentijević, M. Marković, *Best constants in inequalities involving analytic and co-analytic projections*, Potential Analysis, u štampi
- [2] M. Marković, *Hardy and Littlewood theorems and the Bergman distance*, Annales mathématiques du Québec, u štampi
- [3] M. Marković, *A criterion for normality of analytic mappings*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, u štampi
- [4] M. Marković, *On holomorphic functions on negatively curved manifolds*, Monatshefte für Mathematik **196** (2021), 851–860
- [5] A. Crnkić, V. Jurić, M. Marković, *On synchronization in Kuramoto models on spheres*, Analysis and Mathematical Physics **11** (2021), article number 129
- [6] M. Marković, *Representations for the Bloch-type norm of Fréchet-differentiable mappings*, Journal of Geometric Analysis, **31** (2021), 7947–7967
- [7] M. Marković, *Lipschitz constants for the real part and modulus of analytic mappings on a negatively curved surface*, Archiv der Mathematik **116** (2021), 61–66
- [8] M. Marković, *Riesz's Theorem for Lumer's Hardy Spaces*, The American Mathematical Monthly, **127** (2020), 452–455
- [9] M. Marković, *Solution to the Khavinson problem near the boundary of the unit ball*, Constructive Approximation **45** (2017), 243–271
- [10] M. Marković, *Sharp inequalities over the unit polydisc*, Journal of Functional Analysis **268** (2015), 2647–2671



Univerzitet Crne Gore  
Универзитет Црне Горе  
Универзитет Црне Горе  
Универзитет Црне Горе

University of Montenegro

Br. ak. 03 : 590

Datum: 14. 04. 2021.

736  
14. 04. 2021.

Na osnovu člana 72 stav 2 Zakona o visokom obrazovanju ("Službeni list Crne Gore" br 44/14, 47/15, 40/16, 42/17, 71/17, 55/18, 3/19, 17/19, 47/19, 72/19 i 74/20) i člana 32 stav 1 tačka 9 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 07.04.2021. godine, donio je

### O D L U K U O IZBORU U ZVANJE

Dr Đordije Vujadinović bira se u akademsko zvanje vanredni profesor Univerziteta Crne Gore za oblast Matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, na period od pet godina;

SENAT UNIVERZITETA CRNE GORE  
PREDsjEDNIK

Prof. dr Vladimir Božović, vršilac funkcije rektora

## BIOGRAFIJA

### OSNOVNI LIČNI PODACI

Đordje Vujadinović je rođen 1985. u Pljevljima. Osnovnu školu je završio u Ulcinju i Podgorici, a gimnaziju "Slobodan Škerović" u Podgorici. Osnovne studije iz oblasti matematike završio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici, 2004. godine. Poslijediplomske studije iz oblasti Matematičke analize je završio na istom fakultetu, gdje je i održao magistarsku tezu pod nazivom "Integracija na apstraktnim prostorima i maksimalna funkcija" aprila 2010. godine.

Doktorske studije iz oblasti Matematičke analize je započeo 2009. godine na Matematičkom fakultet u Beogradu, Univerzitet u Beogradu. Doktorsku disertaciju pod nazivom "Ocjene norme integralnih operatora na prostorima Besoya i Bloha" odbranio je 21.11.2014.

U periodu od 01.12.2014. do 01.10.2015. boravi na departmanu za matematiku "Guido Castelnuovo" na fakultetu La Sapienza, Univerzitet u Rimu kao dobitnik stipendije Basileus scholarship-program razmijene studenata doktorskih studija. Na privatnom fakultetu Sabandži u Istanbulu boravi u kraćem periodu kao postdoktorski student tokom ljetnjeg semestra 2019.

### PODACI O RADNIM MJESTIMA I IZBORIMA U ZVANJE

Đordje Vujadinović je kao saradnik u nastavi bio u radnom odnosu na Univerzitetu Crne Gore od 2008. do 2015. godine, kada odlazi na studijski boravak u Rimu.

Početkom februara 2016. je izabran u zvanje docenta na Univerzitetu Crne Gore.

Odlukom Senata Univerziteta Crne Gore 08.04.2021. godine Đordje Vujadinović izabran je u zvanje vicedržavnog profesora na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici.

### Bibliografija

- 1.Dj. Vujadinović, *Some Estimates for the Norm of the Bergman Projection on Besov Spaces*, Integral Equations and Operator Theory, 76 (2013), 213-224.
- 2.D. Kalaj, Dj. Vujadinović: *Adjoint operator of Bergman Projection and Besov space B1*, Mathematical Reports (ISSN:1582-3067), Volume 15, Issue 04, Dec. 2013, Page(s) [12185].
- 3.D.Kalaj, Dj.Vujadinović , *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space*, Journal of Operator theory, Volume 73, Issue 1, Winter 2015 pp. 113-126.
4. D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Solution operator of inhomogeneous Dirichlet problem in the unit ball*, Proceedings of American math society, 144, No. 2, 623-635 (2016).
- 5.Dj Vujadinović, *On some class of integral operators related to the Bergman projection*, Publications de l'institut Mathématique 2 Nouvelle série, tome 98(112) (2015).
- 6.M.Grossi, Dj.Vujadinović, *On the Green function of the annulus*, Analysis in Theory and Applications, Analysis in Theory and Applications, No. 1, 32 (2016).

18. Dj. Vujadinović, *The norm of the harmonic Bergman projection and Besov space*, to appear in Mathematical reports 2021.
  
19. Dj. Vujadinović, *Schatten class of Berezin transform on Fock spaces*, to appear in Filomat 2021/22.